O Conceito de “Número Real” em Frege

Caio Bismarck Silva Xavier[1]

RESUMO

O presente trabalho consiste numa discussão acerca do conceito de número real em Frege. Pretende-se explicar como Frege tenta definir os números reais, evidenciando a importância que a noção de “proporção de magnitude” desempenha nesta definição. Na Parte III, no Volume II do *Grundgesetze der Arithmetik* (1903) (de agora em diante apenas: *Grundgesetze*), Frege apresenta sua teoria dos números reais, a qual se segue de uma longa crítica às teorias de números reais vigentes naquela época, como a de Cantor, Dedekind, Thomae e Weierstrass. Visto isso, para cumprir nosso propósito, iremos examinar o texto apenas onde Frege apresenta a sua própria teoria de números reais (a apresentação informal[2]) (§§156-164). Não serão examinadas em detalhes as críticas de Frege as teorias anteriores, a não ser uma introdução da sua crítica ao formalismo, com o objetivo de elucidar tal crítica. Sendo assim, será analisada apenas a parte em que o filósofo apresenta sua própria concepção dos números reais. Para apoiar a discussão, serão utilizados os autores Peter Simons, Eric Snyder e Stewart Shapiro.

PALAVRAS-CHAVE
Números reais; Proporção de magnitude; Filosofia da matemática.

[1] Mestrando em Filosofia pela Universidade Federal de Goiás. E-mail: caiobismarckxavier@gmail.com . CV Lattes: http://lattes.cnpq.br/9295391431857950

[2] A apresentação formal da teoria dos números reais de Frege se inicia em §165, a qual não será tratada no presente trabalho.

The Concept of “Real Number” in Frege

ABSTRACT

The present work consists of a discussion about the concept of real number in Frege. It is intended to explain how Frege tries to define the real numbers, highlighting the importance that the notion of “magnitude-ratio” plays in this definition. In Part III, in Volume II of the *Grundgesetze der Arithmetik* (1903) (from now on only: *Grundgesetze*), Frege presents his theory of real numbers, which is followed by a long criticism of the real number theories in force at that time, such as by Cantor, Dedekind, Thomae and Weierstrass. In view of this, to fulfill our purpose, we will examine the text only where Frege presents his own theory of real numbers (the informal presentation) (§§156-164). Frege's criticisms of previous theories will not be examined in detail, unless an introduction to his criticism of formalism, in order to elucidate such criticism. Thus, only the part in which the philosopher presents his own conception of real numbers will be analyzed. To support the discussion, authors Peter Simons, Eric Snyder and Stewart Shapiro will be used.

KEYWORDS

Real numbers; Magnitude-ratio; Philosophy of mathematics.

Considerações iniciais

Na Parte III, do Volume II do *Grundgesetze* (1903), Frege apresenta sua teoria dos números reais, a qual se segue de uma longa crítica às teorias de números reais vigentes naquela época, como a de Cantor, Dedekind, Thomae e Weierstrass. Para Frege, as teorias desses matemáticos não eram satisfatórias, além de outras razões, por não oferecer uma definição completa do conceito de número real e por confundir conceito e objeto. Se por um lado, todo conceito deve ser bem delimitado, isto é, para todo objeto ele deve satisfazer ou não o conceito, por outro, a separação entre o conceito e o objeto que cai sobre o conceito deveria ser clara, sendo esta uma razão filosófica para criticar o formalismo. Justamente por isso, Frege critica a aritmética formalista, na qual não se distinguia o conteúdo do sinal do próprio sinal.

Ademais, a perspectiva logicista de Frege impugnava qualquer teoria que não fundamentasse a aritmética na lógica. Visto isso, a discussão que se segue esta em função de averiguar se o filósofo consegue uma definição de número real que respeite seus próprios critérios.

A crítica de Frege ao formalismo

Frege distingue dois tipos de teorias de números reais que ele pretende analisar no *Grundgesetze*, a saber, a formalista e a “contentualista”[1] [*contentual*]. Conforme Frege, para o formalismo, os números são figuras produzidas e manipuladas de acordo com regras arbitrárias. Para a “aritmética contentualista [*contentual arithmetic*], essas figuras são meros sinais, sinais numéricos, ferramentas auxiliares externas, representando seus próprios objetos” (FREGE, 2016, p.154, §156). Nesse sentido, parece que da perspectiva da aritmética contentualista, o formalismo considera que o sinal seja o próprio número, isto é, o sinal tem seu conteúdo em si mesmo.

Segundo o filósofo, o formalismo tende a fluir[2] para a via contentualista (FREGE,

[1] Relativo a “conteúdo”.

[2] “Parece que é o destino inevitável da aritmética formal fluir repetidamente para o canal da aritmética conteudística e que ela enfrenta, entre outras, a seguinte dificuldade […].” (FREGE, 2019, p. 154, §156). [Tradução livre].

2016, p.154, §156), pois o formalismo enfrenta um problema: a introdução de figuras de um novo tipo implica que se deva estabelecer também novas regras de manipulação, as quais podem ser tanto proibitivas quanto permissivas, ao passo que seja “demonstrado que essas novas regras não entrem em conflito nem entre si, nem com as regras já anteriormente estabelecidas” (Ibid.). Assim sendo, os números reais seriam conceitos que não precisariam de uma definição anterior à sua utilização, ferindo, desse modo, o requisito fregeano de que todo conceito deva ser bem definido. Além de que o formalismo, na medida em que concebe os números como meros sinais, não satisfaz o requisito da aplicabilidade, já que os números reais, enquanto sinais criados arbitrariamente, não possuiriam referência e a aritmética, por sua vez, iria falhar em se aplicar a realidade.

Para Frege, o formalismo fere a distinção entre conceito e objeto, uma vez que identifica o sinal ele mesmo com o próprio conteúdo. Por conta disso, somente uma aritmética contentualista poderia ser aceita. Em seguida o filósofo explora duas alternativas para a aritmética contentualista: (1) definir conceitualmente os irracionais e aceitar que conceitos possam se tratados como objetos, pois então o conceito de irracional seria ele próprio o número irracional; ou (2) distinguir o conceito de irracional do número irracional ele próprio, reconhecendo que, apesar de distinto de sua referência e contendo notas definitórias do que seja um número irracional, esse conceito poderia ser contraditório e ser vazio. No entanto, Frege não aceita identificação entre conceito e objeto. O conceito é anterior ao objeto. A definição é o que identifica o objeto como sendo uma unidade.

Frege teme que o conceito de número irracional, por conter notas definitórias contraditórias, seja vazio. Em vista disso, o problema do filósofo é que só resta essa via de definir o número irracional conceitualmente (e nesse caso ele teria de ser livre de contradições) e em seguida aplicar o *axioma V*. Assim sendo, Frege diz que a menos que seja encontrada uma maneira de provar que não haja contradição em conceitos vazios, o formalismo deve ser descartado (para Frege é essencial determinar a saturação do conceito, sendo aquilo que o satura diferente do próprio conceito). Parece, portanto, que nem a opção contentualista é satisfatória para Frege, pois ele se depara com o dilema acima.

A concepção de Frege sobre os números reais

Visto os problemas acima, Frege apresenta o que seria a concepção mais adequada sobre o que são “números reais”. O filósofo afirma: “Nós entendemos os números reais como proporções de magnitude [*magnitude-ratio*] e, portanto, excluímos a aritmética formal [...]. Assim, indicamos magnitudes como os objetos entre os quais essa proporção se obtém” (FREGE, 2016, p. 155, §157). Para Frege, portanto, a primeira nota definitória do conceito de “número real” é que “números reais são proporções de magnitude”. Por conseguinte, para melhor caracterizar os números reais como tais proporções, Frege distingue os reais dos números cardinais, os quais não são proporções:

> Como os números cardinais não são proporções, temos que distingui-los dos números inteiros positivos. Portanto, não é possível estender o domínio dos números cardinais ao dos números reais; eles são simplesmente domínios completamente separados. Os números cardinais respondem à pergunta: “Quantos objetos de um certo tipo existem?”, enquanto os números reais podem ser considerados como números de medição que indicam quão grande é uma magnitude em comparação a uma unidade [...] Por esse motivo, também distinguimos entre os números cardinais ∅ e ł e dos números [reais] 0 e 1 (FREGE §157 apud SNYDER; SHAPIRO, 2019:349).[3]

Com isso, Frege mostra que há uma diferença entre números para “medir” (reais) e números para “contar” (cardinais). Dessa forma, cada um destes tipos de números tratam de objetos de tipos diferentes, sendo o que Snyder & Shapiro (2019, p. 349), chamam de *philosophy background* da teoria de Frege, pois tal diferença entre estes números traçam uma distinção ontológica. Essa distinção fica evidente com o fato de que para Frege, números reais são proporções entre magnitudes do mesmo tipo. Enquanto que os números cardinais, ao invés de expressar proporções, expressam a contagem de objeto (SNYDER; SHAPIRO, 2019, p. 349).[4]

Portanto, tendo em vista que números reais são proporções de magnitude, Frege dá continuidade a sua argumentação após distinguir os números que denotam proporções

[3] Original: “Since the cardinal numbers are not ratios, we have to distinguish them from the positive whole numbers. Therefore, it is not possible to extend the domain of the cardinal numbers to that of the real numbers; they are simply completely separate domains. The cardinal numbers answer the question: “How many objects of a certain kind are there?” while the real numbers can be considered as measuring numbers that state how large a magnitude is in comparison to a unit […] For this reason also, we distinguish between the cardinal numbers 0 and 1 and from the [real] numbers 0 and 1.”

[4] Original: “On Frege’s account, real numbers are ratios between magnitudes of the same kind, namely the ratio of a magnitude to a unit magnitude of that kind. Cardinal numbers, on the other hand, count how many objects there are of a certain kind, and so do not express ratios.”

dos números que não denotam proporções.

Embora essa concepção de Frege sobre os reais pareça estar se baseando na geometria, o próprio Frege trata de esclarecer esse ponto, mostrando que isso não pode ser o caso.

Segundo o filósofo, “considerando um número real como uma proporção de magnitude, é repudiada a ideia de que um número real é, por exemplo, um segmento de linha e que um sinal numérico se refere a um segmento de linha” (FREGE, 2016, p. 156, §158). Isto é, um número real não pode ser definido como um segmento de uma reta, pois proporções de magnitudes não são magnitudes particulares, e nem toda magnitude é de natureza geométrica (SNYDER; SHAPIRO, 2019, p. 350). De acordo com Simons, Frege não aceita essa abordagem, porque ela reduz a noção de magnitude à geometria. Sabe-se que nem todas as magnitudes são de natureza geométrica, como massa, temperatura, fluxo luminoso, amplitude sonora etc, ainda que suas proporções sejam expressas por números reais (SIMONS, 1992, p.125).[5]

Esta é uma das duas abordagens “contentualistas”[6], nenhuma das quais Frege considerou ser satisfatórias para definir os reais. Conforme Simons, por isso mesmo Frege procura seguir um caminho intermediário entre a abordagem formalista e a contentualista. Um dos problemas dessa segunda abordagem é justamente a existência de vários tipos de magnitudes. Assim, não seria possível determinar a aplicação dos números reais às magnitudes correspondentes. De acordo com Snyder & Shapiro (2019, p. 350), “se os números reais tiverem uma definição geométrica, seria completamente misterioso como o mesmo número real poderia ser aplicado a esses vários tipos de magnitudes”[7]. Portanto, o fato de haver vários tipos de magnitudes implica que nem toda magnitude é geométrica, e que não seria possível determinar quando o mesmo número real poderia ser aplicado a magnitudes distintas. Essas são as primeiras razões para Frege negar a definição geométrica dos reais.

Além do fato de que existem diferentes tipos de magnitudes, e dessa forma, as

[5] Original: “Frege's criticism of this second approach is that it is too specific, since there are many magnitudes, such as angle, mass, temperature, time-span, and light-intensity, whose magnitude ratios are also given by real numbers, but such ratios are not in themselves geometrical.”

[6] A primeira abordagem é a construção aritmética de Dedekind e Cantor, segunda a qual seria possível ao matemático criar ou controlar novos objetos. Para Dedekind, isso se daria através da noção de “corte”, o que seria responsável pela criação dos números irracionais (SIMONS, 1992, p. 119).

[7] Original: “if the real numbers are given a geometric definition, it would be completely mysterious how the same real number could apply to those various kinds of magnitudes.”

várias magnitudes confundiriam a aplicação de qualquer número real a elas, o argumento de Frege para criticar a definição dos reais pela geometria também envolve distinguir as noções de "segmento" e "número de medição". Para Frege, dado um segmento de reta a, a compreensão de "a" como o número de medição é equívoca, uma vez que o segmento de reta é diferente do número que faz sua medição, isto é, o segmento de reta não é a referência de um número real (FREGE, 2016, p. 156, §158). Nesse sentido, Frege afirma o seguinte:

> Assim, o número real se destaca de tipos específicos de magnitude e, por assim dizer, flutua acima deles. E é por isso que não parece apropriado focalizar nossas considerações muito de perto nas construções geométricas. Elas podem muito bem ser usados para facilitar o entendimento, mas é preciso tomar cuidado para não deixar que nada se apoie nelas como fundamento (Ibid.).[8]

Nesse caso, a relação da geometria com os números reais estaria apenas no fato de que os números reais servem para "medir". Dessa forma, enquanto trata de grandezas contínuas, a geometria seria descrita pelos números reais, sendo um dos domínios aos quais os reais se aplicam. Portanto, de acordo com Frege, ainda que considerações geométricas possuam "função didática" na explicação dos números reais, tais considerações não podem, por sua vez, servirem de base para a definição daqueles números. Pois, para Frege, "se proposições aritméticas podem ser comprovadas sem o recurso a axiomas geométricos, então devem ser. Caso contrário, nega-se desnecessariamente a autonomia da aritmética e sua natureza lógica" (Ibid.). Com efeito, uma fundamentação geométrica para os números reais entraria em confronto com o projeto logicista de Frege, cuja função é fundamentar toda a aritmética na lógica.

Segundo Frege, a objeção de que o projeto logicista tem caráter formalista não se sustenta, pois a ideia é defender a natureza puramente lógica da aritmética, o que é diferente de se basear em regras arbitrárias do formalismo. Para Frege, as regras devem ser derivadas da própria referência dos sinais da aritmética, os quais são os próprios objetos aritméticos, sendo arbitrária apenas a notação (FREGE, 2016: 156, §158).

[8] Original: "Thus, the real number detaches itself from specific kinds of magnitude and, as it were, floats above them. And this is why it does not seem appropriate to focus our considerations too closely on geometric constructions. They may well be used to facilitate the understanding, but one has to beware of making anything rest on them as foundation."

O conceito de “magnitude” de Frege

Tendo concebido os números reais como proporções de magnitude, Frege, por conseguinte, se pergunta pela referência do nome “magnitude” (FREGE, 2016, p. 156, §159). Segundo Frege, todas as tentativas de responder a questão do “que é magnitude” foram falhas. Conforme o filósofo, “a razão para essas falhas reside em fazer a pergunta errada” (Ibid. §161). O problema da existência dos diferentes tipos de magnitudes tem como consequência a dificuldade de “dizer como os objetos pertencentes a esses tipos de magnitude diferem de outros objetos que não pertencem a nenhum tipo de magnitude” (Ibid.). A partir disso, o filósofo pensa que:

> Em vez de perguntar quais propriedades um objeto deve ter para ser uma magnitude, é preciso perguntar: como um conceito deve ser constituído para que sua extensão seja um domínio de magnitudes? A partir de agora, por questões de brevidade, falaremos de “classe” em vez de “extensão de um conceito”. A questão também pode ser assim: que propriedades uma classe deve ter para ser um domínio de magnitudes? Uma coisa é uma magnitude não em si mesma, mas apenas na medida em que pertence, com outros objetos, a uma classe que é um domínio de magnitudes (Ibid.).[9]

Ou seja, para Frege, o que quer que seja uma magnitude não é algo em si mesmo, mas algo que é determinado pelo conceito sob o qual ele cai. Podemos entender essa determinação como uma ascensão semântica, cuja função é estabelecer a primazia do conceito em relação ao objeto que o satura.

Segundo Snyder & Shapiro (2019, p. 351), “as magnitudes não ocorrem isoladamente, mas apenas com outras magnitudes do mesmo tipo”. Com isso, Frege vai assumir a noção de “domínio de magnitudes” para tentar mostrar como se deve construir o conceito de magnitude. Um domínio de magnitudes é estabelecido pela relação que magnitudes do mesmo tipo mantêm entre si.

Frege afirma não estar preocupado com “magnitudes absolutas”, isto é, aquelas que não correspondem a números negativos (que possuem o zero como limite). Ele quer apenas as magnitudes onde seja possível estabelecer inversão entre positivos e negativos. Para Simons, “o objetivo de Frege é uma teoria dos números reais, tanto negativos quanto

[9] Original: “Instead of asking which properties an object must have in order to be a magnitude, one needs to ask: how must a concept be constituted in order for its extension to be a domain of magnitudes? Henceforth, for brevity, we will speak of "class" rather than "extension of a concept". The question can then also be framed like this: what properties must a class have in order to be a domain of magnitudes? A thing is a magnitude not in itself but only insofar it belongs, with other objects, to a class that is a domain of magnitudes.”

positivos, o que significa que os domínios de magnitude devem incorporar algo correspondente à reversão do sinal” (SIMONS, 1992, p. 26).

Esse é o ponto em que Frege toma a noção de “relação” como fundamental para definir “magnitude”. De acordo com Simons, “assim como ele usa ‘classe’ para abreviar ‘extensão de um conceito’, ele também usa a palavra ‘Relação’ para a extensão de uma relação’” (Ibid.). Nesse sentido, Frege mostra que é melhor

> dizer ‘Relação’ em vez de ‘extensão de uma relação’, então podemos dizer: as magnitudes consideradas por nós são Relações. Consequentemente, as proporções de magnitudes, ou números reais, serão consideradas Relações sobre Relações. Nossos domínios de magnitudes são classes de Relações, ou seja, extensões de conceitos subordinados ao conceito de *Relação* (FREGE, 2016, p. 160, §162).[10]

Portanto, conforme Frege, “Relação” é um conceito (de 2ª ordem), o qual determina a extensão de uma relação. Enquanto “relação” significa uma função diádica. Dessa forma, se magnitudes são Relações, e os números reais são proporções de magnitudes, então números reais são Relações de Relações. Com esse raciocínio, Frege oferece o que seria uma definição dos números reais.

Para finalizar, segue uma citação de Snyder & Shapiro que sintetiza a teoria de Frege sobre os números reais:

> Apelando ao célebre Carl Friedrich Gauss, Frege argumenta que as várias propriedades das magnitudes podem ser definidas independentemente de qualquer conhecimento dos números reais. Ele então mostra como, usando números cardinais (que ele já havia demonstrado ser uma classe de objetos lógicos) como base para as relações que constituem magnitudes, números reais podem ser definidos de maneira a satisfazer duas demandas; primeiro, que são objetos lógicos e, em segundo lugar, que sua aplicabilidade decorre de sua construção (SNYDER; SHAPIRO, 2019, p. 349).[11]

Nota-se que a definição de número real de Frege evita a acusação de circularidade, uma vez que a definição das propriedades de magnitudes não pressupõe a noção de número real. Por outro lado, Frege salvaguarda seu logicismo, mostrando que são objetos lógicos, como os números cardinais, que estão na base da construção das proporções de

[10] Original: [to] “say ‘Relation’ instead of ‘extension of a relation’, then we can say: the magnitudes considered by us are Relations. Accordingly, the ratios of magnitudes, or real numbers, will be regarded as Relations on Relations. Our domains of magnitudes are classes of Relations, namely extensions of concepts that are subordinate to the concept Relation.”

[11] Original: “Appealing to the celebrated Carl Friedrich Gauss, Frege argues that the various properties of magnitudes can be defined independently of any knowledge of the real numbers. He then shows how, by using cardinal numbers (which he had already shown to be a class of logical objects) as the basis of those relations constituting magnitudes, real numbers can be defined in such a way as to satisfy two demands; first that they are logical objects and secondly that their applicability flows from their construction.”

magnitudes, sobre as quais, por sua vez, é definido o conceito de número real.

Considerações finais

Frege consegue definir de certo modo os números reais. Sua definição cumpre dois dos requisitos que o próprio filósofo considera ser incontornáveis. No entanto, fica a dúvida se tal definição satisfaz seu próprio critério de “definição com bordas bem delimitadas”. Ao que parece, ainda que a construção dos números reais de Frege possua uma base lógica, os conceitos que constituem tal construção possuem eles próprios limites abertos.

Referências Bibliográficas

FREGE, G. The Real Numbers, Vol. 2, Part III, §§156-64. In: *Basic Laws of Arithmetic, Volumes I & II: Derived Using Concept-Script*. New York: Oxford University Press, 2016.

SIMONS, P. *Frege's Theory of the Real Numbers*. History and Philosophy of Logic 8(1):25–44, 1992.

SNYDER, E.; SHAPIRO, S. Frege on the Real Numbers. In: *Essays on Frege's Basic Laws of Arithmetic*. New York: Oxford University Press, 2019.